آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی و تجربی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۹ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ اگر $a = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ باشد، حاصل a^2 چقدر است؟

۲ سهمی $y = -x^2 + 4x - 4$ را رسم کنید و سپس رأس سهمی و معادله خط تقارن آن را مشخص کنید.

۳ در یک دنباله حسابی اگر $a_6 + a_4 + a_8 = 90$ باشد، جمله ششم دنباله چقدر است؟

معادلات زیر را از روش‌های خواسته‌شده، حل کنید:

۴ $x^2 - 3x - 10 = 0$ (روش تجزیه)

۵ حاصل عبارت زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} + \frac{x^4 - 1}{x^3 + x}$$

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

۶ $\sqrt[۷]{(۳/۵)^{۴}}$

۷ $۲^{\frac{۵}{۶}}$

۸ اگر $۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۴}{۳}$، نسبت‌های مثلثاتی $\cot\alpha$ و $\cos\alpha$ را به دست آورید.

۹ اگر $۲x + ۱$، $x + ۱$ و $۲x - ۱$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، x را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ که در آن $a = ۰$ است، پیدا کنید.

۱۱ حاصل عبارت $\frac{x^{۳} - x^{۲} - x + ۱}{x^{۶} - x^{۴} - x^{۲} + ۱}$ را به‌ازای $x = \sqrt{۵}$ به دست آورید.

۱۲ در یک دنبالهٔ هندسی $t_{۱}t_{۳} = ۴$ و $(t_{۳})^{۲} = ۱۶$، اگر جمله‌های دنباله در حال افزایش باشند، دنباله را مشخص کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۳ اگر رأس سهمی به معادلهٔ $y = x^{۲} - px + ۶p - ۲p^{۲} - ۲$ در ناحیهٔ سوم قرار داشته باشد، محدودهٔ p را بیابید.

۱۴ اگر $۰ < a < ۱$ باشد آنگاه یکی از علامت‌های ($<$ یا $>$) را در جای خالی قرار دهید.

$a^{۲} \square a^{۳}$ $\qquad$ $\sqrt{a} \square \sqrt[۳]{a}$

۱۵ تجزیه کنید.

الف $۱۰x^{۲} - x - ۲ =$

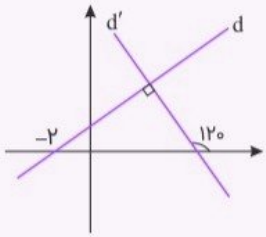
ب $x^{۴} + ۴y^{۴} =$

پ $x^{۵} + x + ۱ =$

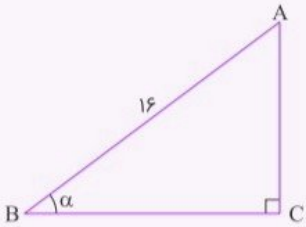
۱۶ اعداد ۲^{a} و $۴\sqrt{۲}$ و ۲^{b} سه جمله متوالی یک دنباله هندسی‌اند. واسطه حسابی بین a و b را به‌دست آورید.

۱۷ عبارت $a^{۶} - ۲b^{۶} + ۲a^{۳}b^{۳}$ را تجزیه کنید.

۱۸ در شکل زیر دو خط d و d' بر هم عمودند. معادله خط d را بنویسید.



۱۹ در شکل زیر، اندازهٔ وتر برابر ۱۶ و محیط مثلث برابر ۳۵ است. حاصل تقریبی $\sin\alpha . \cos\alpha$ را به دست آورید.



۲۰ اگر $x + y + z = w$، مقدار عبارت $A = \dfrac{w^۳ - z^۳ - x^۳ - y^۳}{x^۲y + xy^۲ + w^۲z - wz^۲}$ را بیابید.

عبارت‌های زیر را مقایسه کنید.

۲۱ $(\sqrt{۲})^{-۲} \square ۲^{-\sqrt{۲}}$

۲۲ $\sqrt[۳]{۲} \square \sqrt{۳}$

۲۳ اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\sin^{۳}\alpha - \cos^{۳}\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(۱ + \sin\alpha\cos\alpha)$$

۲۴ اگر $a = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱}$ و $b = \sqrt{۲} - ۱$ باشد، حاصل عبارت $\frac{ab + ۱}{b}$ را بیابید.

۲۵ در دنبالهٔ هندسی زیر، جملهٔ نهم را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۲۷}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۳}, \cdots$$

۲۶ اگر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ علامت‌های مختلف داشته باشند، α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی واقع است؟

با فرض با معنی بودن هر کسر درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۲۷

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$$

۲۸

$$\frac{\cos\theta}{۱ + \sin\theta} = \frac{۱ - \sin\theta}{\cos\theta}$$

۲۹ $$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\tan\alpha$$

۳۰ $$1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\sin x$$

۳۱ $$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

۳۲ باتوجه‌به دنباله‌های $b_n=(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}-1}$، $c_n=\frac{1}{3n-1}$ و $d_n=n^2+1$، حاصل عبارت $b_4+d_2-c_1$ را به دست آورید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۳۳ اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی خواهد بود.

۳۴ اگر $0<a<1$ آنگاه $\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}$.

۳۵ اگر $x + y = ۸$ باشد، مقدار عبارت $\frac{x^۲ + ۲x + ۲y - y^۲}{x^۲ - y^۲ + ۴x + ۴}$ را محاسبه نمایید.

۳۶ عبارت $A = (۲x - ۱)(۳ - x)$ را تعیین علامت کنید و سپس مقدار A را برای $x = ۴$ و $x = ۰$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست‌آمده را با جدول تعیین علامت بررسی کنید.

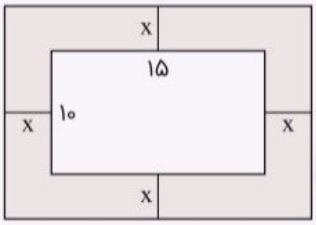
۳۷ اگر $a + b = ۱۶$ و $a^۳ - b^۳ = ۱۲(a^۲ + b^۲ + ab)$، حاصل $\frac{ab}{a + ۲b}$ را محاسبه کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۸ مجموع ۵ جمله اول دنباله حسابی ۲۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن ۷۵ است. دنباله را مشخص کنید.

۳۹ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x - |x| - ۴| < ۶$ را به دست آورید.

۴۰ یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همه لبه‌های عکس تا قاب برابر x باشد، مقدار x را پیدا کنید.



۴۱ اگر عبارت $y = ۴p^۲ - (p+۱)x + x^۲$، به‌ازای تمام مقادیر x، مثبت باشد، محدودهٔ p را بیابید.

۴۲ اگر $\frac{\sqrt[۲۰]{x} \times \sqrt[۵]{x} \times \sqrt[۴]{x}}{\sqrt[۶]{x} \times \sqrt[۳]{x} \times \sqrt{x}} = \frac{۱}{۴}$، مقدار x را بیابید. $(x > ۰)$

۴۳ اگر $\frac{\sqrt[۳]{-۸^a} \times \sqrt[۴]{۴}}{\sqrt{۳۲}} = \left(-\frac{۱}{۶۴}\right)^۳$ باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

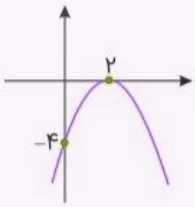
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی و تجربی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱

$$a = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \times 5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 = 5$$

۲



$$y = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$$

مختصات رأس:$(2\ ,\ 0)$

معادله محور تقارن: $x = 2$

۳

$$a_1 + 5d + a_1 + 3d + a_1 + 7d \quad \Rightarrow \quad 3a_1 + 15d = 90$$

$$\xrightarrow{\div 3} a_1 + 5d = 30 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 30$$

پاسخ سؤال ۴

۴

$$(x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5 \ \text{یا} \ x = -2$$

۵

$$\frac{x^2+3x+9}{x^3-27} = \frac{\cancel{x^2+3x+9}}{(x-3)\cancel{(x^2+3x+9)}} = \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x^4-1}{x^3+x} = \frac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{x\cancel{(x^2+1)}} = \frac{x^2-1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{x^4-1}{x^3+x} = \frac{1}{x-3} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{x+(x-3)(x^2-1)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x+x^3-x-3x^2+3}{x(x-3)} = \frac{x^3-3x^2+3}{x(x-3)}$$

پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶ $(۳/۵)^{\frac{۴}{۷}}$

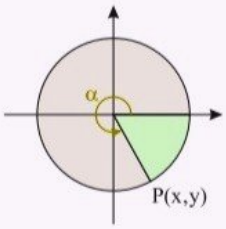
۷ $\sqrt[۶]{۲^۵}$

۸ روش اول: استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\alpha\text{ در ناحیه چهارم}}\cos\alpha=+\frac{۳}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۳}{۴}$$

روش دوم: استفاده از دایره مثلثاتی



$$\tan\alpha=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{y}{x}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x$$
$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cot\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

۹ اگر $a\ ,\ b\ ,\ c$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، $b^۲=ac$ است. بنابراین:

$$(x+۱)^۲=(۲x-۱)(۲x+۱)\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۴x^۲-۱$$
$$\Rightarrow ۳x^۲-۲x-۲=۰$$

$$\Delta=۴-۴(-۶)=۲۸\Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۲۸}}{۶}=\frac{۲\pm۲\sqrt{۷}}{۶}=\frac{۱\pm\sqrt{۷}}{۳}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را با روش مربع کامل، طی مراحل زیر حل می‌کنیم:

	$ax^2+bx+c=0$
دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه می‌کنیم.	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
به دو طرف معادله، $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود.	$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$
دو طرف را ساده کرده‌ایم.	$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^2-4ac$ پس: $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$. با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست می‌آوریم.

اگر $\Delta<0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت پس معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta>0$ باشد، کافی است از دو طرف معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ ریشهٔ دوم بگیریم:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta=0$ باشد، این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}\Rightarrow(x+\frac{b}{2a})^2=0\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0$$
$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

پس در حالت $\Delta=0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد. این ریشه از معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})=0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$ جواب یکسان دارند. به جواب مشترک آن‌ها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم.

۱۱

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^6-x^4-x^2+1}=\frac{x^3-x^2-x+1}{x^6-x^2-x^4+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x^4-1)-(x^4-1)}=\frac{(x-1)\cancel{(x^2-1)}}{(x^4-1)\cancel{(x^2-1)}}$$
$$=\frac{x-1}{x^4-1}=\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{1}{6(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{24}$$

۱۲

$$\begin{cases} t_۱ t_۳ = ۴ \Rightarrow t\left(tr^۲\right) = ۴ \Rightarrow t^۲ r^۲ = ۴ \quad (I) \\ (t_۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \left(tr^۲\right)^۲ = ۱۶ \Rightarrow t^۲ r^۴ = ۱۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر هم}]{\text{دو رابطه}} \frac{t^۲ r^۲}{t^۲ r^۴} = \frac{۴}{۱۶} \Rightarrow \frac{۱}{r^۲} = \frac{۱}{۴}$$

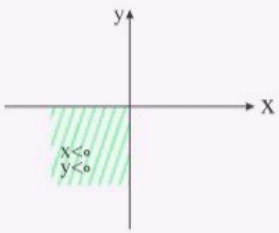
$\Rightarrow r = \pm ۲ \Rightarrow r = ۲$ چون جملات دنباله در حال افزایش است

$(I) : t^۲ r^۲ = ۴ \Rightarrow t^۲ (۲)^۲ = ۴ \Rightarrow t^۲ \times ۴ = ۴$

$\Rightarrow t^۲ = ۱ \Rightarrow t = \pm ۱ \Rightarrow t = ۱$ چون جملات دنباله در حال افزایش است

دنباله : ۱, ۲, ۴, ۸, ...

۱۳



$y = x^۲ - px + (۶p - ۲p^۲ - ۲)$

رأس $x : -\frac{b}{۲a} < ۰ \Rightarrow \frac{p}{۲} < ۰ \Rightarrow p < ۰$

رأس $y : -\frac{\Delta}{۴a} < ۰ \Rightarrow -\frac{p^۲ - ۴(۶p - ۲p^۲ - ۲)}{۴} = -\frac{p^۲ + ۸p^۲ - ۲۴p + ۸}{۴} < ۰$

$$\Rightarrow ۹p^۲ - ۲۴p + ۸ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} p > \frac{۲۴ + \sqrt{۲۸۸}}{۱۸} \\ p < \frac{۲۴ - \sqrt{۲۸۸}}{۱۸} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\cap} p < ۰$

۱۴

$a^۲ \boxed{>} a^۳ \qquad \sqrt{a} \boxed{<} \sqrt[۳]{a}$

۱۵

الف

$$\frac{۱۰}{۱۰} \times (۱۰x^۲ - x - ۲) = \frac{(۱۰x)^۲ - ۱۰x - ۲۰}{۱۰} = \frac{(۱۰x - ۵)(۱۰x + ۴)}{۱۰} = \frac{۵(۲x - ۱)۲(۵x + ۲)}{۱۰} = (۲x - ۱)(۵x + ۲)$$

ب

اتحاد فرعی : $(x^۲ + ۲y^۲)^۲ - ۲(x^۲)(۲y^۲) \xrightarrow{\text{مزدوج}} \left[x^۲ + ۲y^۲ - ۲xy\right]\left[x^۲ + ۲y^۲ + ۲xy\right]$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

پ

$$\underline{\underline{x^5}} + \underline{\underline{x^4}} - \underline{x^4} + \underline{\underline{x^3}} - \underline{x^3} + x^2 - \underline{x^2} + x + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)\left[x^3 - x^2 + 1\right]$$

۱۶

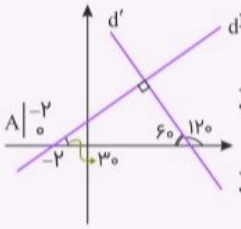
$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^{a+b} = 2^5 \Rightarrow a + b = 5$$

$$\text{واسطه حسابی} = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$$

۱۷

$$a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3 = a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3 + b^6 - b^6 = (a^6 + 2a^3b^3 + b^6) - b^6 - 2b^6 =$$
$$(a^6 + 2a^3b^3 + b^6) - 3b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 3b^6 = (a^3 + b^3 - \sqrt{3}b^3)(a^3 + b^3 + \sqrt{3}b^3)$$

۱۸



$${}_d m_d = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۹

$$AC + BC = 19$$

$$(\underbrace{BC + AC}_{19})^2 = \underbrace{BC^2 + AC^2}_{256} + 2AC.BC$$

$$\Rightarrow 361 = 256 + 2(AC.BC) \Rightarrow 2AC.BC = 105$$

$$\Rightarrow AC.BC = 52/5$$

$$\Rightarrow AC = AB\sin\alpha = 16\sin\alpha$$

$$BC = AB\cos\alpha = 16\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 16^2 \times \sin\alpha.\cos\alpha = 52/5 \Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{52/5}{256} \simeq 0/2$$

۲۰

$$x + y + z = w \Rightarrow x + y = w - z \quad (1)$$

$$w^3 - z^3 - x^3 - y^3 = (w^3 - z^3) - (x^3 + y^3)$$

$$= [(w - z)^3 + 3wz(w - z)] - [(x + y)^3 - 3xy(x + y)] \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} w^3 - z^3 - x^3 - y^3 = \cancel{(x+y)^3} + 3wz(x + y) - \cancel{(x+y)^3} + 3xy(x + y)$$

$$= 3(x + y)(wz + xy)$$

$$\Rightarrow x^2y + xy^2 + w^2z - wz^2 = xy(x + y) + wz(w - z) = (x + y)(xy + wz) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} A = \frac{3(x + y)(wz + xy)}{(x + y)(xy + wz)} = 3$$

پاسخ سؤالات ۲۱ تا ۲۲

۲۱

$$(\sqrt{۲})^{-۲} = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{-۲} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} > ۲^{-\sqrt{۲}} = (۲^{-۱})^{\sqrt{۲}} = (\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۲}}$$

۲۲

$$(\sqrt[۳\times۲]{۲})^{۲} = \sqrt[۶]{۴} < (\sqrt[۲\times۳]{۳})^{۳} = \sqrt[۶]{۲۷}$$

۲۳

طبق اتحاد چاق و لاغر : $(a^۳ - b^۳) = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$

$$\Rightarrow \sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^۲\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^۲\alpha)$$

$$\Rightarrow \sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(۱ + \sin\alpha\cos\alpha)$$

۲۴

$$a = \frac{\sqrt{۳}.\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۱) - (\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{(\sqrt{۲}+۱)\cancel{(\sqrt{۳}-۱)}}{\cancel{\sqrt{۳}-۱}} = \sqrt{۲}+۱$$

$$\Rightarrow \frac{ab+۱}{b} = a + \frac{۱}{b} = \sqrt{۲}+۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۲}{\sqrt{۲}-۱} = ۲(\sqrt{۲}+۱)$$

۲۵

$$a_۹ = a_۱ r^۸ \Rightarrow a_۹ = \frac{۱}{۲۷} \times ۳^۸ \Rightarrow a_۹ = ۲۴۳$$

۲۶ ناحیهٔ دوم یا سوم

پاسخ سؤالات ۲۷ تا ۳۱

۲۷

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$$

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۱}{\cos\theta}$$

از سمت چپ تساوی، سمت راست را نتیجه گرفتیم، بنابراین این تساوی همواره برقرار است.

پادینو padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۸

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

می‌دانیم اگر تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد، رابطهٔ $ab=cd$ نیز برقرار است:

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta\times\cos\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\Rightarrow\cos^2\theta=\cos^2\theta$$

به یک تساوی همواره درست رسیدیم. چون کلیهٔ روابط بیان‌شده برای اثبات، بازگشت‌پذیر است می‌توان نتیجه گرفت $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ یک رابطهٔ درست است.

۲۹

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\tan\alpha$$

با فرض $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$، سمت چپ تساوی را ساده کرده و جواب را به‌صورت ساده‌شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

۳۰

$$1-\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=\sin x$$

می‌دانیم رابطهٔ $\cos^2x=1-\sin^2x$ همواره برقرار است، بنابراین داریم:

$$1-\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=1-\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}=1-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$1-(1-\sin x)=1-1+\sin x=\sin x$$

۳۱

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

با در نظر گرفتن $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، عبارت سمت چپ تساوی را به‌صورت ساده‌شده به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

صورت و مخرج این عبارت را در عبارت $1+\sin x$ ضرب می‌کنیم داریم:

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{1-\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

۳۲ داریم:

$$\begin{cases} b_n = (-\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۲}-۱} \Rightarrow b_۴ = (-\frac{۱}{۲})^{\frac{۴}{۲}-۱} = \frac{-۱}{۲} \\ d_n = n^۲ + ۱ \Rightarrow d_۲ = (۲)^۲ + ۱ = ۵ \\ c_n = \frac{۱}{۳n-۱} \Rightarrow c_۱ = \frac{۱}{۳ \times ۱ - ۱} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_۴ + d_۲ - c_۱ = -\frac{۱}{۲} + ۵ - \frac{۱}{۲} = ۴$$

پاسخ سؤالات ۳۳ تا ۳۴

۳۳ درست

۳۴ نادرست

۳۵

$$\frac{x^۲ + ۲x + ۲y - y^۲}{x^۲ - y^۲ + ۴x + ۴} = \frac{(x+۱)^۲ - (y-۱)^۲}{(x+۲)^۲ - y^۲} = \frac{\cancel{(x+۱-y+۱)}(x+۱+y-۱)}{\cancel{(x+۲-y)}(x+۲+y)}$$

$$= \frac{x+y}{x+y+۲} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ جدول تعیین علامت برای هرکدام از عبارت‌های $x - ۳$ و $۲x - ۱$، به‌صورت زیر است:

x	$x<۳$	۳	$x>۳$
$۳-x$	$+$	۰	$-$

x	$x<\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$x>\frac{۱}{۲}$
$۲x-۱$	$-$	۰	$+$

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

x	$x<\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}<x<۳$	۳	$x>۳$
$۲x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۳-x$	$+$		$+$	۰	$-$

بنابراین در سه ناحیهٔ بالا که با رنگ‌های مختلف نشان داده شده، علامت هرکدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > ۳$، عبارت $۲x - ۱$، مثبت است؛ ولی $۳ - x$، منفی می‌باشد، پس علامت عبارت حاصل‌ضرب آن‌ها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیهٔ دیگر، جدول تعیین علامت $A = (۲x - ۱)(۳ - x)$ به‌صورت زیر است.

x		$\frac{۱}{۲}$		۳	
$۲x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۳-x$	$+$		$+$	۰	$-$
A	$-$	۰	$+$	۰	$-$

دقت کنید که روی ستون‌ها نیز قاعدهٔ ضرب انجام شده است.

اکنون با در نظر گرفتن $x = ۴$ داریم:

$$x = ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ \Rightarrow ۲(۴) - ۱ = ۷ > ۰ \\ ۳ - x \Rightarrow ۳ - ۴ = -۱ < ۰ \end{cases}$$

$$A = (۲x - ۱)(۳ - x) = ۷ \times (-۱) = -۷ < ۰$$

مشاهده می‌شود که مقادیر به‌دست‌آمده، با جدول تعیین علامت مطابقت دارند.

برای $x = ۰$ نیز داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ \Rightarrow ۲(۰) - ۱ = -۱ < ۰ \\ ۳ - x \Rightarrow ۳ - ۰ = ۳ > ۰ \end{cases}$$

$$A = (۲x - ۱)(۳ - x) = (-۱) \times ۳ = -۳ < ۰$$

به‌ازای $x = ۰$ نیز تمام مقادیر به‌دست‌آمده، مطابق با جدول تعیین علامت هستند.

۳۷

$$a^{۳} - b^{۳} = (a-b)(a^{۲} + ab + b^{۲}) \Rightarrow a - b = ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = ۱۶ \\ a - b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۴ \\ b = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a + ۲b} = \frac{۱۴ \times ۲}{۱۴ + ۴} = \frac{۲۸}{۱۸} = \frac{۱۴}{۹}$$

۳۸

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۲۵ \;\Rightarrow\; ۵a_۱ + ۱۰d = ۲۵$$
$$a_۶ + a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰} = ۷۵ \;\Rightarrow\; ۵a_۱ + ۳۵d = ۷۵$$

$$\Rightarrow\; ۲۵d = ۵۰ \Rightarrow d = ۲ \;,\; a_۱ = ۱$$

$$۱ , ۳ , ۵ , ۷ , \ldots$$

۳۹

$$|x - |x| - ۴| < ۶ \Rightarrow -۶ < x - |x| - ۴ < ۶$$

$$x - |x| - ۴ < ۶ \Rightarrow x - ۴ - ۶ < |x| \Rightarrow |x| > x - ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x > x - ۱۰ \;\checkmark \\ x < -x + ۱۰ \Rightarrow x < ۵ \end{cases} \quad (۱)$$

$$-۶ < x - |x| - ۴ \Rightarrow |x| < x + ۲ \Rightarrow \begin{cases} x < x + ۲ \;\checkmark \\ x > -x - ۲ \Rightarrow x > -۱ \end{cases} \quad (۲)$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۵$$

۴۰

روش اول: استفاده از روش کلی در حل معادله درجه ۲

$$(۱۰ + ۲x)(۱۵ + ۲x) = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^{۲} + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰$$

$$\begin{cases} \Delta = b^{۲} - ۴ac \\ x_۱ , x_۲ = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۴۹۰۰ \\ x_۱ = \dfrac{۵}{۲} \text{ قابل قبول} \;,\; x_۲ = -۱۵ \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تجزیه در حل معادله درجه ۲

$$(۱۰ + ۲x)(۱۵ + ۲x) = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^{۲} + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰$$

$$(۲x + ۳۰)(۲x - ۵) = ۰$$

$$\Rightarrow x = -۱۵ \;,\; x = \frac{۵}{۲} \text{ قابل قبول}$$

۴۱

$$a > ۰ \;,\; \Delta < ۰ \Rightarrow (p+۱)^{۲} - ۴(۴p^{۲})(۱) < ۰ \Rightarrow p^{۲} + ۲p + ۱ - ۱۶p^{۲} < ۰$$

$$\Rightarrow ۱۵p^{۲} - ۲p - ۱ > ۰ \Rightarrow p = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۶۰}}{۳۰} = \frac{۲ \pm ۸}{۳۰} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{۱}{۳} \\ p = -\dfrac{۱}{۵} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < p \;,\; p < -\frac{۱}{۵}$$

۴۲

$$\frac{\sqrt[۲۰]{x} \times \sqrt[۵]{x} \times \sqrt[۴]{x}}{\sqrt[۶]{x} \times \sqrt[۳]{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[۲۰]{x \times x^{۴} \times x^{۵}}}{\sqrt[۶]{x \times x^{۲} \times x^{۳}}} = \frac{\sqrt[۲۰]{x^{۱۰}}}{\sqrt[۶]{x^{۶}}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = ۱۶$$

۴۳

$$\frac{-\sqrt[۳]{(۲^{a})^{۳}} \times \sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = (-\frac{۱}{۲^{۶}})^{۳} \Rightarrow -\frac{۲^{a} \times \cancel{\sqrt{۲}}}{۴\cancel{\sqrt{۲}}} = -\frac{۱}{۲^{۱۸}}$$

$$\Rightarrow ۲^{a-۲} = ۲^{-۱۸} \Rightarrow a = -۱۶$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org